11 Fonction carré, fonction polynôme du second degré

Livre p.120.

Objectifs :

- Découvrir la fonction carré et ses premières propriétés
- Découvrir les fonctions polynômes du second degré, et leur forme canonique

Aperçu historique :

La fonction affine que nous avons étudiée au Chapitre **??** *était notre première "fonction de référence". La fonction affine est de degré 1 : la puissance maximale de x dans l'expression $y = mx + p$ est $x^1 = x$.*
La fonction carré est notre deuxième "fonction de référence" ; les fonctions polynômes de degré 2, de la forme $y = ax^2 + bx + c$, sont construites à partir de la fonction carré et sont de degré 2.
La représentation graphique de la fonction carré est une parabole ; c'est la trajectoire décrite par un objet que l'on lance et qui est soumis à la pesanteur. Historiquement, les paraboles ont été étudiées en particulier car elles permettaient d'étudier la trajectoire des boulets de canons (balistique), à partir de la loi de la chute libre énoncée par Galilée (1568-1642) : $z = -\frac{1}{2}gt^2 + z_0$.

1. La fonction carré

Définition 11.1 La fonction carré est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui, à tout réel associe son carré.

$$f : x \longmapsto x^2$$

Exemple Soit f la fonction carré.
Alors on a $f(3) = 3^2 = 9,\ f(0) = 0,\ f(-2,5) = 6,25,\ \ldots$

Propriété 11.1 La fonction carré est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et décroissante sur $\mathbb{R}^-$. Cela signifie que :

- deux nombres positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés ;
- deux nombres négatifs sont rangés dans l'ordre inverse de leurs carrés.

Démonstration :

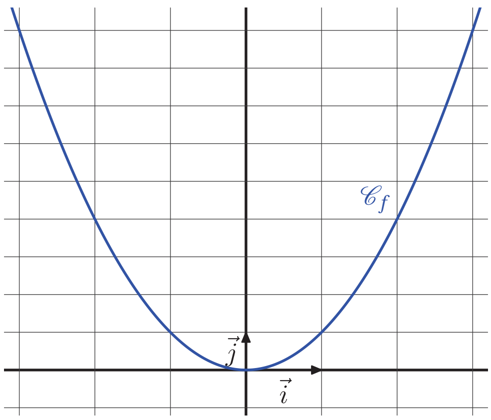
- Il s'agit de démontrer que si a et b sont deux réels positifs tels que $a < b$ alors $a^2 < b^2$.
  Si $a = 0$ alors $a^2 = 0$ et $b^2 > 0$ donc a et b sont dans le même ordre que a^2 et b^2.
  Si $a \neq 0$, alors a est strictement positif. Or $a < b$ donc en multipliant les deux membres de cette inégalité par a, on obtient $a^2 < ab$.
  De même, $b > 0$ donc en multipliant les deux membres de $a < b$ par b on obtient : $ab < b^2$.
  Ainsi $a^2 < ab < b^2$ donc a et b sont dans le même ordre que leurs carrés.
- Il s'agit de démontrer que si a et b sont deux réels négatifs tels que $a < b$ alors $a^2 > b^2$.
  Si $b = 0$ alors $b^2 = 0$ et $a^2 > 0$ donc a et b sont dans l'ordre inverse de leurs carrés a^2 et b^2.
  Si $b \neq 0$, alors b est strictement négatif. Or $a < b$ donc en multipliant les deux membres de cette inégalité par b, on obtient $ab > b^2$. (On change le sens d'une inégalité lorsqu'on multiplie les deux membres par un nombre strictement négatif)
  De même, $a < 0$ donc en multipliant les deux membres de $a < b$ par a on obtient : $a^2 > ab$.
  Ainsi $a^2 > ab > b^2$ donc a et b sont dans l'ordre inverse de leurs carrés.

Tableau de variations :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f : x \mapsto x^2$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Le minimum de la fonction carré est 0 ; il est atteint pour $x = 0$.
La courbe représentative de la fonction carré tracée ci-contre est une ***parabole*** de sommet O et d'axe $(O; \vec{j})$.

Courbe représentative :



Rappel sur les équations du type $x^2 = k$:
Soit k un réel quelconque. Alors :

- si $k > 0$, alors l'équation $x^2 = k$ admet deux solutions : $\sqrt{k}$ et $-\sqrt{k}$;
- si $k = 0$, alors l'équation $x^2 = k$ admet une unique solution : 0 ;
- si $k < 0$, alors l'équation $x^2 = k$ n'a pas de solution, car le carré d'un nombre réel est toujours positif.

2. Fonction polynôme du second degré

Dans les problèmes dans lesquels intervient la fonction carré, on rencontre souvent des fonctions définies par des expressions du type $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$. Cette expression pourrait être écrite $Y = aX^2$ si l'on décidait que $X = x - \alpha$ et que $Y = y - \beta$; elle est donc très proche d'une "fonction carré". Dans l'exemple ci-dessous, on étudie une fonction de ce type ; cet exemple peut servir d'inspiration pour la résolution de nombreux exercices.

Exemple Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 12x + 13$.

1. Montrer que $f(x) = 2(x-3)^2 - 5$.
2. Déterminer les variations de f sur $]-\infty; 3]$ puis sur $[3; +\infty[$.
3. Dresser le tableau de variations de f pour $x \in [-1; 6]$.
4. Dresser un tableau de valeurs de la fonction f puis tracer sa courbe représentative dans un repère.

Réponses :

1. On a : $2(x-3)^2 - 5 = 2(x^2 - 6x + 9) - 5 = 2x^2 - 12x + 13 = f(x)$.
   Ainsi, connaissant x, pour calculer $f(x)$ on a le programme de calcul suivant :

   $$\boxed{x} \xrightarrow{-3} \boxed{x-3} \xrightarrow{X \mapsto X^2} \boxed{(x-3)^2} \xrightarrow{\times 2} \boxed{2(x-3)^2} \xrightarrow{-5} \boxed{f(x)}$$

2. Soient a et b deux réels tels que $a < b \leq 3$.

On a :	$a < b \leq 3$	On soustrait 3 :
Donc :	$a - 3 < b - 3 \leq 0$	La fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}^-$
Donc :	$(a-3)^2 > (b-3)^2$	On multiplie par 2 $(2 > 0)$
Donc :	$2(a-3)^2 > 2(b-3)^2$	On soustrait 5 :
Donc :	$2(a-3)^2 - 5 > 2(b-3)^2 - 5$	
D'où :	$f(a) > f(b)$	

   Donc la fonction f est décroissante sur $]-\infty; 3]$.
   De même sur $[3; +\infty[$, soit a et b tels que $3 \leq a < b$:

On a :	$3 \leq a < b$	On soustrait 3 :
Donc :	$0 \leq a - 3 < b - 3$	La fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$
Donc :	$(a-3)^2 < (b-3)^2$	On multiplie par 2 $(2 > 0)$
Donc :	$2(a-3)^2 < 2(b-3)^2$	On soustrait 5 :
Donc :	$2(a-3)^2 - 5 < 2(b-3)^2 - 5$	
D'où :	$f(a) < f(b)$	

   Donc la fonction f est croissante sur $[3; +\infty[$.

3. On en déduit le tableau de variations de f sur $[-1; 6]$:

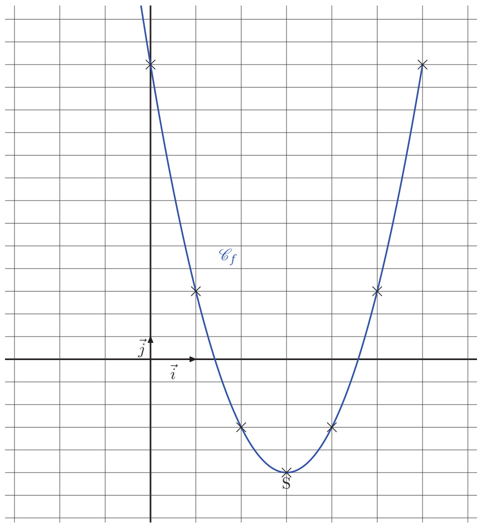
x	-1	3	6
f	27 $\searrow$	-5	$\nearrow$ 13

$f(-1) = 2\times(-1)^2 - 12\times(-1) + 13 = 27$ et $f(6) = 2\times 6^2 - 12\times 6 + 13 = 13$.

4. On dresse un tableau de valeurs :

x	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	27	13	3	-3	-5	-3	3	13

On trace alors la courbe représentative de f dans le repère ci-dessous :



Cette courbe est une parabole de sommet $S(3\,;-5)$ et d'axe $(S;\vec{j})$.
La fonction f admet pour minimum -5 qui est atteint pour $x = 3$.

Définition 11.2 Une fonction f dont l'expression algébrique peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$ où $a \neq 0$ est appelée *fonction polynôme de degré 2*.

Propriété 11.2 Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$. Alors il existe deux réels α et β tels que $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$.
α est la valeur de x pour laquelle $f(x)$ atteint son extremum qui est β :

- si $a > 0$, alors β est un minimum ;
- si $a < 0$, alors β est un maximum.

L'expression $a(x-\alpha)^2 + \beta$ est appelée *forme canonique* du polynome f.

Allure et sens de variation :
Dans tous les cas, la représentation graphique de f est une parabole $\mathscr{P}$ de sommet $S(\alpha;\beta)$.

- Si $a > 0$, alors la fonction f est décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha;+\infty[$.
- Si $a < 0$, alors la fonction f est croissante sur $]-\infty;\alpha]$ et décroissante sur $[\alpha;+\infty[$.